Некоторые материалы из лекций по анализу

ИНТЕГРАЛ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

дельта-функция и идея обобщенных функций

(начальные представления)

Содержание

Интеграл Римана-Стилтьеса

Конкретная задача и наводящие соображения.

Мы рассмотрели целый ряд примеров эффективного использования интеграла при вычислении площадей, объемов тел вращения, длин путей, работы сил, энергии... Обнаружили потенциальность гравитационного поля и подсчитали вторую космическую скорость для Земли. Располагая аппаратом интегрального исчисления, убедились, например, в том, что длина пути не зависит от его параметризации. Заодно отметили, что некоторые вычисления (длины эллипса) связаны с неэлементарными функциями (в данном случае с эллиптическими).

Все перечисленные выше величины (длины, площади, объемы, работа, ...), как и сам интеграл Римана, аддитивны. Мы знаем, что любая аддитивная функция $I[\alpha,\beta]$ ориентированного промежутка $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ имеет вид $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, если положить $F(x)=I[a,x]+C$. В частности, можно взять произвольную функцию F и по ней построить аддитивную функцию $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, считая $I[a,x]=F(x)$. Если функция F разрывна на отрезке $[a,b]$, то там разрывна и функция $I[a,x]$. Но тогда она не может быть представлена в виде интеграла Римана $\int_a^x p(t)dt$ ни от какой интегрируемой по Риману функции (плотности p), т.к. такой интеграл, как мы знаем, непрерывен по x.

Пусть, например, отрезок $[-1,1]$ — нить, в середине которой закреплена бусинка массы 1. Если $I[\alpha,\beta]$ — масса, попавшая в промежуток $[\alpha,\beta]\subset[-1,1]$, то функция $I[-1,x]$ равна нулю, пока $-1\le x<0$, и равна единице, когда $0\le x\le 1$. Если попытаться описать такое распределение массы на отрезке в терминах плотности распределения (т.е. предела отношения массы, попавшей в окрестность точки, к величине окрестности, когда последняя стягивается к точке), то мы должны были бы считать, что $p(x)=0$ при $x\neq 0$ и $p(x)=+\infty$ при $x=0$. Физики, а теперь и все, вслед за Дираком называют эту "функцию" (такую плотность распределения) дельта-функцией, обозначают ее через δ и пишут, что $\int_\alpha^\beta \delta(x)dx=1$, если $\alpha<0<\beta$ и $\int_\alpha^\beta \delta(x)dx=0$, если $\alpha<\beta<0$ или если $0<\alpha<\beta$, каковы бы ни были числа α и β.

Разумеется, интеграл, понимаемый традиционно, например, по Риману, здесь не имеет смысла (уже по одному тому, что под интегралом стоит неограниченная "функция"). Вольное употребление символа интеграла здесь всего-навсего замена аддитивной функции $I[\alpha,\beta]$, рассмотренной выше, когда мы говорили о бусинке на нитке.

Центр масс.

Вспомним, фундаментальное уравнение $m\ddot{r} = F$ движения точки массы m под действием силы F, где r — радиус-вектор точки. Если имеется система из n материальных точек, то для каждой из них имеется свое равенство $m_i\ddot{r}_i = F_i$. Суммируя эти равенства, получаем соотношение $\Sigma_{i=1}^n m_i\ddot{r}_i = \Sigma_{i=1}^n F_i$, которое можно переписать в виде $M\ \Sigma_{i=1}^n \frac{m_i}{M}\ddot{r}_i = \Sigma_{i=1}^n F_i$ или в форме $M\ddot{r}_M = F$, где $M = \Sigma_{i=1}^n m_i$, $F = \Sigma_{i=1}^n F_i$ и $r_M = \Sigma_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$. То есть, если совокупную массу системы поместить в точку пространства, радиус-вектор которой $r_M = \Sigma_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$, то под воздействием силы $F = \Sigma_{i=1}^n F_i$ она будет двигаться согласно закону Ньютона, какими бы сложными ни были взаимные движения отдельных частей системы.

Точка пространства, радиус-вектор которой $\Sigma_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$ мы нашли, называется *центром масс системы материальных точек.*

Пусть теперь перед нами стоит задача найти центр масс материального тела, т.е. области D пространства, в которой как-то распределена масса. Пусть в элементе объема dv сосредоточена масса dm и пусть M — общая масса тела D. Тогда, надо полагать, $M = \int_D dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M}\int_D rdm$, где r — радиус-вектор элемента массы dm.

По объемам мы пока интегрировать не умеем, поэтому рассмотрим одномерный случай, который тоже вполне содержателен. Итак вместо области D рассмотрим отрезок $[a, b]$ координатной оси $\mathbb{R}$.

Тогда $M = \int_a^b dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M}\int_a^b xdm$, где x — координата элемента массы dm, который поэтому можно написать и поточнее, как $dm(x)$.

Смысл написанного, по-видимому, должен быть следующим. Берем разбиение P отрезка $[a, b]$ с какими-то отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечает масса Δm_i. Составляем суммы $\Sigma_i \Delta m_i, \quad \Sigma_i \xi_i \Delta m_i$, и, переходя к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю, находим соответственно то, что обозначено как $\int_a^b dm$ и $\int_a^b xdm$.

Мы приходим к следующему обобщению интеграла Римана.

Определение интеграла Римана-Стилтьеса.

Пусть f и g — функции, вещественно, комплексно или векторнозначные на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $(P, \xi) = (a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b)$ разбиение этого отрезка с отмеченными точками и параметром $\lambda(P)$. Составим сумму $\Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i$, где $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$.

Интегралом Римана-Стилтьеса функции f по функции g на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\int_a^b f(x)dg(x) := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i \ , \tag{1}$$

если указанный предел существует.

В частности, когда $g(x) = x$, мы возвращаемся к стандартному интегралу Римана.

Случай сведения интеграла Римана-Стилтьеса к интегралу Римана.

Отметим также, что если функция g гладкая, а f — функция, интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx \ , \tag{2}$$

т.е. в этом случае вычисление интеграла Римана-Стилтьеся сводится к вычислению интеграла Римана от функции fg' на рассматриваемом отрезке.

В самом деле, пользуясь гладкостью функции g и теоремой о среднем, перепишем сумму, стоящую в равенстве (1) справа, в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\tilde{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g'(\tilde{\xi}_i) - g'(\xi_i))\Delta x_i \ .$$

В силу равномерной непрерывности функции g' на отрезке $[a, b]$ и ограниченности функции f, последняя сумма стремится к нулю при $\lambda(P) \to 0$. Предпоследняя сумма есть обычная интегральная сумма для интеграла, стоящего в (2) справа. В силу сделанных предположений о функциях f и g, функция fg' интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Поэтому указанная сумма при $\lambda(P) \to 0$ стремится к значению этого интеграла, что и завершает доказательство равенства (2).

Задача. Мы провели доказательство, используя теорему о среднем, справедливую для вещественнозначных функций. Используя теорему о конечном приращении, проведите доказательство для векторнозначных (например, комплекснозначных) функций.

Функция Хевисайда и пример вычисления интеграла Римана-Стилтьеса.

Функция Хевисайда $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется соотношениями $H(x) = 0$ при $x < 0$ и $H(x) = 1$ при $0 \le x$.

Подсчитаем интеграл $\int_a^b f(x)dH(x)$. По определению (1) составим сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta H_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(H(x_i) - H(x_{i-1}))$. В силу определения функции Хевисайда эта сумма, очевидно, равна нулю, если отрезок $[a, b]$ не содержит точки 0, и равна $f(\xi_i)$, если точка 0 попала на некоторый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ (точнее, внутрь него или в его конец x_i). В первом случае интеграл, конечно, равен нулю.

Во втором случае при $\lambda(P) \to 0$ точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ стремится к 0, поэтому, если функция f непрерывна в 0, то пределом рассматриваемых сумм будет величина $f(0)$.

Если же функция f разрывна в 0, то малым изменением значения ξ_i можно заметно менять значение $f(\xi_i)$ и, значит, интегральные суммы не будут иметь предела при $\lambda(P) \to 0$.

Ясно, что последнее наблюдение имеет общий характер: совпадение точек разрыва функций f и g, участвующих в интеграле Римана-Стилтьеса (1), неизбежно ведет к отсутствию предела, если такая точка оказалась внутри отрезка интегрирования.

Итак, проведенный подсчет показывает, что если, например, φ — функция класса $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, т.е. заданная на всей прямой непрерывная вещественнозначная функция, тождественно равная нулю вне некоторого ограниченного множества, то

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dH(x) = \varphi(0). \tag{3}$$

Дельта-функция Дирака — эвристическое описание.

Как уже было отмечено выше, физики, и не только они, вслед за Дираком используют дельта-функцию δ. Эта "функция" равна нулю всюду, кроме начала координат, где она бесконечна. Но вместе с тем (и это главное)

$\int_\alpha^\beta \delta(x)dx = 1$, если $\alpha < 0 < \beta$ и $\int_\alpha^\beta \delta(x)dx = 0$, если $\alpha < \beta < 0$ или если $0 < \alpha < \beta$, каковы бы ни были числа α и β.

Естественно считать, что умножение подынтегральной функции на число приводит к умножению интеграла на это же число. Но тогда, если некоторая функция φ непрерывна в начале координат, то, учитывая, что она почти постоянна в малой окрестности $U(0)$ начала координат, а интеграл $\int_{U(0)} \delta(x)dx = 1$, заключаем, что должно быть

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0). \tag{4}$$

Сравнивая соотношения 2, 3 и 4 и продолжая эту смелую цепочку заключений, приходим к выводу, что

$$H'(x) = \delta(x). \tag{5}$$

Разумеется, ни в какую классику это не укладывается. Но изложенные соображения вполне конструктивны и если бы непременно надо было написать значение $H'(x)$, то мы написали бы именно то, что и сейчас: 0, если $x \neq 0$, и $+\infty$, если $x = 0$.

Соответствие функция — функционал.

Один из способов выхода из сложившихся затруднений состоит в следующей идее расширения (обобщения) самого понятия «функция».

Будем смотреть на функцию через ее взаимодействие с другими функциями. (Ведь нас обычно не интересует внутреннее устройство аппарата, например человека, и мы считаем, что знаем объект, если знаем, как объект отвечает на входные воздействия, на те или иные входящие вопросы.)

Возьмем интегрируемую на отрезке $[a, b]$ функцию f и рассмотрим порождаемый ею функционал A_f (функцию на функциях)

$$A_f(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \tag{6}$$

Чтобы миновать технические затруднения, будем считать *пробные функции* φ гладкими и даже из класса $C_0^{(\infty)}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности концов отрезка. Можно даже продолжить обе функции f, φ нулем вне отрезка $[a,b]$ и вместо интеграла по отрезку писать интеграл

$$A_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx. \tag{7}$$

Зная значения функционала A_f на пробных функциях, мы, если надо, легко найдем значение $f(x)$ функции f в любой точке, где эта функция непрерывна.

Задача. a) Проверьте, что величина $\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt$ (интегральное среднее) при $\varepsilon \to +0$ стремится к $f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

b) Покажите, что ступенчатую функцию $\bar{\delta}_\varepsilon$, равную нулю вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и равную $\frac{1}{2\varepsilon}$ на самом этом отрезке (функция $\bar{\delta}_\varepsilon$ имитирует δ-функцию Дирака), можно аппроксимировать гладкой функцией δ_ε с теми же свойствами: $\delta_\varepsilon(\mathrm{x}) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon(\mathrm{x}) = 0$ при $|x| \geq \varepsilon$ и $\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(\mathrm{x})dx = 1$, т.е. $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(\mathrm{x})dx = 1$.

c) Покажите теперь, что если $\varepsilon \to 0$, то $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\delta_\varepsilon(x-t)dt \to f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

Функционал как обобщенная функция.

Итак, интегрируемая функция порождает линейный функционал A_f (линейную функцию на векторном пространстве функций $C_0^{(\infty)}[a,b]$ или на $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$), определенный формулами (6) или (7), причем по функционалу A_f сама интегрируемая функция восстанавливается во всех точках непрерывности (т.е. почти всюду). Таким образом, функционал A_f можно рассматривать как иную кодировку или интерпретацию функции f, рассматриваемой в зеркале функционалов.

Но в этом зеркале можно увидеть и иные линейные функционалы, которые не порождаются указанным способом никакой интегрируемой функцией. Примером может служить уже встретившийся нам функционал $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dH(x) = \varphi(0)$, который мы обозначим как A_δ (учитывая желание написать $\delta(x)dx$ вместо $dH(x)$).

Функционалы первого типа называют *регулярными*, а второго — *сингулярными*.

На функционалы и будем смотреть как на *обобщенные функции*. Множество рассмотренных функционалов содержит наши обычные функции в виде подмножества, состоящего из регулярных функционалов.

Итак, в связи с рассмотрением интеграла Римана и его обобщения в виде интеграла Стилтьеса мы дали представление об идее построения обобщенных функций. Не станем погружаться в детали теории обобщенных функций, связанные, например, с рассмотрением различных пространств пробных функций и построением линейных функционалов (обобщенных функций) на них. Лучше продемонстрируем правило дифференцирования обобщенных функций. А здесь, в качестве заключительного замечания, указывающего на полезную роль интеграла Стилтьеса, добавим, что на пространстве $C[a,b]$ функций φ, непрерывных на отрезке $[a,b]$, любой (как регулярный, так и сингулярный) линейный непрерывный функционал представляется в виде интеграла Стилтьеса $\int_a^b \varphi(x)dg(x)$ с некоторой, должным образом подобранной, функцией g.

(Подобно тому, как сингулярный функционал A_δ, представляющий обобщенную функцию δ, имеет вид $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dH(x)$, указанный в формуле (3).)

Мы начали с примера, где при отыскании центра масс нам встретился интеграл Стилтьеса $\int_a^b xdm(x)$. Интеграл $M_n = \int_a^b x^n dm(x)$ называется *моментом порядка n* соответственно меры (например, вероятностной) или массы, или заряда, распределенных на отрезке $[a,b]$. Особенно часто встречаются моменты $M_0, M_1, M_2 : M_0$ — совокупная масса (мера, заряд); M_1/M_0 — дает центр масс в механике, а M_1 — математическое ожидание случайной величины в теории вероятностей; M_2 — момент инерции в механике и дисперсия случайной величины с математическим ожиданием $M_1 = 0$ в теории вероятностей. Одна из задач теории моментов — восстановление распределения по его моментам.

Дифференцирование обобщенных функций.

Пусть A — обобщенная функция. Какую обобщенную функцию A' следовало бы считать производной от A?

Рассмотрим вопрос сначала для регулярной обобщенной функции, т.е. для функционала A_f, порожденного некоторой классической функцией f, например, гладкой финитной функцией класса $C_0^{(1)}$. Тогда производной A'_f от A_f естественно считать функционал $A_{f'}$, порожденный функцией f' — производной исходной функции.

Используя интегрирование по частям, находим, что

$$A'_f(\varphi) := A_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$- \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx =: A_f(\varphi').$$

Итак, мы нашли, что в рассмотренном случае

$$A'_f(\varphi) = -A_f(\varphi') \tag{8}$$

Это дает основание принять следующее *определение*

$$A'(\varphi) := -A(\varphi'). \tag{9}$$

Здесь указано, как функционал A' действует на любую функцию $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, и тем самым функционал A' полностью определен.

Действие линейного функционала A на функцию φ вместо $A(\varphi)$ часто записывают в следующем удобном во многих отношениях виде $< A, \varphi >$, напоминающим скалярное произведение и указывающим явно, что спаривание линейно по каждой из пары его переменных.

В этих обозначениях, если теперь f — любая обобщенная функция, то в соответствии с определением (9)

$$< f', \varphi > := - < f, \varphi' > . \tag{10}$$

Производные функции Хевисайда и дельта-функции.

Подсчитаем, например, производную функции Хевисайда, рассматриваемой как обобщенную функцию, действующую по стандартному закону регулярной обобщенной функции

$$< H, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx.$$

В соответствии с определением (9) или (10)

$$< H', \varphi >:= - < H, \varphi' >:= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$
$$= -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0).$$

Мы показали, что $< H', \varphi >= \varphi(0)$. Но ведь по определению обобщенной функции δ имеем $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$. Значит, мы показали, что в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$H' = \delta.$$

Подсчитаем, например, еще δ' и δ'', т.е. укажем действие этих функционалов:

$$< \delta', \varphi >:= - < \delta, \varphi' >:= -\varphi'(0);$$
$$< \delta'', \varphi >:= - < \delta', \varphi' >:= \varphi''(0).$$

Ясно теперь, что вообще $< \delta^{(n)}, \varphi >= (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

Мы видим, что обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Это их замечательное свойство имеет много разнообразных проявлений, разрешая операции, которые с обычными функциями возможны только при очень специальных ограничениях.

В заключение сделаем еще следующее замечание общего характера. Пусть X - векторное пространство, X^* — двойственное к X векторное пространство, состоящее из линейных функций на X, и пусть X^{**} — пространство, двойственное к пространству X^*. Значение $x^*(x)$ функции $x^* \in X^*$ на векторе $x \in X$ будем записывать, как и выше, в виде спаривания $< x^*, x >$. Фиксируя здесь x, мы получаем линейную функцию относительно x^*. Таким образом, каждый элемент $x \in X$ можно трактовать как элемент пространства X^{**}, т.е. мы имеем вложение $I : X \to X^{**}$. В конечномерном случае все пространства X, X^*, X^{**} изоморфны и $I(X) = X^{**}$. В общем же случае $I(X) \Subset X^{**}$, т.е. $I(X)$ составляет только часть всего пространства X^{**}. Именно это и наблюдалось при переходе от функций (им отвечали регулярные функционалы) к обобщенным функциям, которых оказалось больше.